Mathematik Warm Up - Beispielsammlung

T. Steinberger, K. Rheinberger

FH Vorarlberg

Den TeilnehmerInnen der Lehrveranstaltung wird dringend empfohlen, die Beispielsammlung **vor** der Lehrveranstaltung durchzuarbeiten! Dadurch können Sie während der Lehrveranstaltung konkrete(re) Fragen stellen und profitieren bei weitem mehr!

Mengenlehre

1. Um welche Zahlenmengen handelt es sich bei $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ und welche Rechenoperationen sind auf den jeweiligen Mengen durchführbar ohne sie zu verlassen?

2. Was bedeuten die Symbole: $\cap, \cup, \setminus, \in, \subseteq, \supseteq, \forall, \exists$?

3. Beispiel: Schreiben Sie die Buchstaben Ihres Vornamens und Nachnamens als Mengen V und N. Bilden Sie $V \cap N$, $V \cup N$, $V \setminus N$, und $N \setminus V$.

4. Beispiel: *Venn-diagramme*

   a) Zeichnen Sie ein Mengendiagramm für die Mengen A und B, wenn gilt

   a1) $A \cap B = A$, a2) $A \cup B = A$, a3) $A \cap B = \{\}$, a4) $A \setminus B = A$

   b) Zeichnen Sie ein Mengendiagramm für die Mengen A, B und C, wenn gilt

   b1) $A \cup B = B$ und $B \cap C = \{\}$, b2) $A \subseteq C$ und $B \subseteq C$ und $A \cap B = \{\}$

5. Beispiel: Seien $A = \{x \in \mathbb{R} | -2 \leq x < 3\}$ und B=$[1, 5)$. Ist A ein Intervall? Zeichnen Sie die beiden Mengen auf der Zahlengerade $\mathbb{R}$. Bilden und zeichnen Sie $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \cap \mathbb{N}$, und $B \cap \mathbb{Z}$.

6. Schreiben Sie die Mengen $M_1 = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 4\}$ und $M_2 = \{x \in \mathbb{R} : -2 < x < 2\}$ in Intervallschreibweise und bilden Sie $M_1 \cap M_2$, $M_1 \cup M_2$ und $M_1 \setminus M_2$.

7. Bestimmen Sie die durch $3n - 15 \leq 4$ definierte Teilmenge von $\mathbb{N}$ in aufzählender und beschreibender Form.

Grundrechnungsarten

8. Beispiel: Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

$$\text{a)} \sum_{i=-1}^{4}(i+1), \quad \text{b)} \sum_{a=3}^{6} a^2, \quad \text{c)} \sum_{k=1}^{10} 2k, \quad \text{d)} \prod_{g=-2}^{3} g$$

9. Beispiel: Schreiben Sie mit Hilfe des Summenzeichens:

   a) $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{20}{2^{20}}$

   b) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n-1}$

10. Binomisch Formeln:

    a) $(a+b)^2 =?$

    b) $(a-b)^2 =?$

    c) $a^2 - b^2 =?$

    d) $(a+b)^3 =?$

    e) $(a-b)^3 =?$

11. Beispiel: Fassen Sie folgende Brüche zu einem Bruch zusammen, bzw. vereinfachen Sie so weit wie möglich:

$$\text{a)} \frac{5}{12} + \frac{2}{3} - \frac{7}{6}, \quad \text{b)} \frac{1-t}{t^6} + \frac{1}{t^4} - \frac{1}{t^3}, \quad \text{c)} \frac{4x}{2 - \frac{8}{1-2x}}, \quad \text{d)} \frac{4}{13} \cdot \frac{26}{11} : \frac{7}{22}$$

12. Beispiel: Kürzen Sie so weit wie möglich:

    a) $\frac{84m^2-168mn}{144n-72m} =$

    b) $\frac{2a+a^2+1}{2a^2-2} =$

    c) $\frac{(2x^2+44x+242)(180-18x)}{24x^4+24x^3-2640x^2} =$

13. Beispiel:(Polynomdivision)

    a) Berechnen Sie $(2x^4 - 11x^3 + 25x^2 - 32x + 20) : (2x^2 - 7x + 6)$.

    b) Berechnen Sie $(x^5 + x^2 + 2x + 2) : (x^2 + 2x + 1)$.

    c) Stellen Sie fest, ob $1, 2, -1$ Nullstellen von $2x^4 - 7x^3 + 3x^2 + 7x - 5$ sind.

14. Welche Rechenregeln für das Rechnen mit Potenzen kennen Sie?

15. Beispiel: Berechnen Sie:

    a) $(a^4 - b^4)^2 - (a^4 + b^4)^2 =$

    b) $3x^2y^3(5x^{-1}y^2)^2 =$

    c) $\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3} =$

16. Beispiel: Vereinfachen Sie die folgenden Terme und geben Sie an für welche Werte der Variablen die jeweiligen Terme definiert sind.

a) $\frac{\sqrt[3]{x^2}}{(x^2)^{-\frac{1}{3}}}$

b) $\frac{\sqrt[2]{x^3}}{\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^2}$

c) $\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

d) $\frac{\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}}{\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}}$

e) $\left(\frac{\sqrt[4]{x}\sqrt{y^2}(z^2x^3)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[4]{x^3y^6}\sqrt[3]{z^4}}\right)^{-\frac{1}{2}}$

17. Wie ist $\log_b x$ der Logarithmus zur Basis b ($b > 0, b \neq 1$) von x ($x > 0$) definiert?

18. Leiten Sie die Logarithmengesetze aus den Rechenregeln für das Rechnen mit Potenzen ab.

19. Warum gilt $\log_b(x) = \log_a(x)\log_b(a)$?

20. Berechnen Sie (ohne Taschenrechner):

a) $\log(0.000001) =$

b) $\ln(e^{-0.5}) =$

c) $\log_{0.5}(\frac{1}{32}) =$

d) $\log_3(1) =$

e) $\ln\left(\sqrt{\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}}\right) =$

Gleichungen

21. Beispiel: Bestimmen Sie die Lösungsmengen folgender Gleichungen und Textaufgaben in $\mathbb{R}$.

a) $\dfrac{5}{4} = \dfrac{5+x}{x}$

b) $(a-x)(x+c) = 2c(a-x) - (b-x)(c-x)$

c) $\dfrac{3x-16}{3} + \dfrac{2x-10}{5} = 3 - \dfrac{x+1}{15}$

d) $\dfrac{x-2}{x+2} - \dfrac{x+4}{x-2} = 2\dfrac{x-38}{x^2-4}$

e) Zwei Bahnstationen A und B sind 30 km voneinander entfernt. Von A aus fährt ein Güterzug mit einer konstanten Geschwindigkeit von 30 km/h in Richtung B.

Von B aus fährt ein Eilzug mit konstanter Geschwindigkeit von 90 km/h nach A. Wo und wann treffen sich die beiden Züge, wenn sie gleichzeitig abfahren?

f) Vermindert man das Vierfache einer Zahl um 2 und dividiert durch die um 4 verminderte Zahl, so erhält man 11. Bestimmen sie die Zahl.

g) Der Vater eines Schülers ist viereinhalbmal so alt wie sein Sohn. Beide zusammen sind 27 Jahre jünger als der einundsiebzigjährige Opa des Schülers. Wie alt sind Vater und Sohn?

Lösung: a) $x = 20$ b) $x = c$ für $a \neq b$, x beliebig für $a = b$ c) $x = 7$ d) $x = 6$ e) Nach 15 Minuten, der Güterzug fährt 7,5 km und der Eilzug fährt 22,5 km. f) $x = 6$ g) Der Vater ist 36 und der Sohn 8 Jahre alt.

22. Beispiel: Bestimmen Sie die Lösungsmengen folgender Gleichungen in $\mathbb{R}$ und zerlegen Sie in Linearfaktoren falls möglich.

    a) $x^2 + 12x + 35 = 0$ b) $-9x^2 + 18x - 9 = 0$ c) $3x^2 - 18x + 42 = 0$

    Lösung: a) $x_1 = -5, x_2 = -7$ b) $x_1 = x_2 = 1$ c) $L = \{\}$

23. Beispiel: Bestimmen Sie die Lösungsmengen folgender Gleichungen in $\mathbb{R}$. Hinweis: Polynomdivision mit Hilfe einer angegebenen Lösung bzw. durch Probieren

    a) $x^3 - 6x^2 - x + 6 = 0,\ x_1 = 1$

    b) $x^4 - 7x^3 + 5x^2 + 7x - 6 = 0$

    Lösung: a) $x_2 = 6, x_3 = -1$ b) $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 6, x_4 = 1$

24. Beispiel: Bruchgleichungen

    a) $\dfrac{2x+1}{x-3} + \dfrac{3x-5}{x+3} = \dfrac{2x^2+2x+18}{x^2-9}$

    b) $\dfrac{x+2}{2x-1} = \dfrac{4x-1}{x}$

    c) $\dfrac{2x+3}{x-1} + \dfrac{4x+5}{x+1} = \dfrac{6x^2+6x-2}{x^2-1}$

    Lösung: a) $x = 0$ b) $x_1 = 1, x_2 = \dfrac{1}{7}$ c) $L = \mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$

25. Beispiel: Wurzelgleichungen in $\mathbb{R}$

    a) $5 + \sqrt{9x^2 - 65} = 3x$

    b) $\sqrt{x+5} = \sqrt{2x+3} + 1$

    c) $x + 5\sqrt[3]{x^2} - 22\sqrt[3]{x} + 16 = 0$

    Lösung: a) $x = 3$ b) $x = -1$ c) $L = \{-512, 1, 8\}$

    Hinweis: Substituiere $z = \sqrt[3]{x}$.

26. Beispiel: Ungleichungen

a) $5x - 6 < 4 + 9x$

b) $(3x - 5)(x - 2) \leq 4(x - 2)$

c) $\dfrac{3x - 1}{2x + 4} < 2$

d) $-2x^2 + 9x - 4 < 0$

Lösung: a) $L = (-\frac{5}{2}, \infty)$ b) $L = [2, 3]$ c) $L = \mathbb{R} \backslash [-9, -2]$ d) $L = \mathbb{R} \backslash [\frac{1}{2}, 4]$

27. Beispiel: Betrags(un)gleichungen

a) $|x + 1| = \dfrac{x}{2} + 2$

b) $|x - 5| < |x + 1|$

Lösung: a) $x = \pm 2$ b) $L = (2, \infty)$

28. Beispiel: Lineare Gleichungssysteme

a)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 4 \\ x_1 - 2x_2 &= -5 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \frac{11}{2x - 3y} + \frac{18}{3x - 2y} &= 13 \\ \frac{27}{3x - 2y} - \frac{2}{2x - 3y} &= 1 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} 5x + 3y + 2z &= 207 \\ 5x - 3y &= 37 \\ 3y - 2z &= 19 \end{aligned}$$

d) Zwei Arbeiter bekommen Ausschachtungsarbeiten übertragen. Wenn beide zusammen arbeiten, benötigen sie 12 Tage. Arbeitet der erste 2 Tage und der zweite 3 Tage, so schaffen sie in dieser Zeit nur 1/5 der gesamten Arbeit. Wie lange würde jeder alleine für die Arbeit benötigen?

Lösung: a) $x_1 = -1, x_2 = 2$ b) $x = 5, y = 3$ c) $x = 20, y = 21, z = 22$ d) 20 und 30 Tage

Funktionen

29. Beispiel: *Funktionen*

    a) Welche der in Abb. 1 dargestellten Pfeildiagramme stellen Funktionen dar? Warum (nicht)? Falls ja, ist die Funktion surjektiv, injektiv, bijektiv? b) Zeichen

    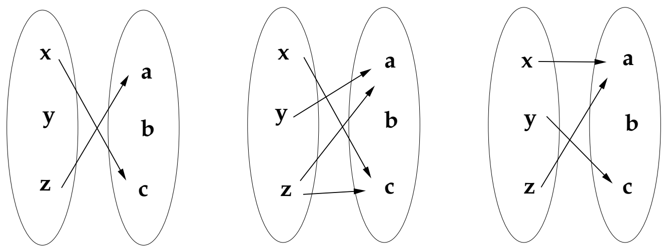

    Abbildung 1: Pfeildiagramme

    Sie mit den Mengen aus Abb. 1 Pfeildiagramme zu einer surjektiven, einer injektiven und einer bijektiven Funktion.

    c) Wenn man jedem Menschen in Österreich seine Telefonnummer(n) zuordnet, erhält man damit eine Funktion? Wie sieht es bei der Zuordnung der Sozialversicherungsnummer aus?

30. Beispiel: *Graphen einfacher Funktionen*

    a) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $y = 3x + 2$ im Bereich $[-2, 5]$. Vergleichen Sie mit der allgemeinen Form $y = kx + d$. Erklären Sie am Beispiel die Bedeutung der Parameter k und d.

    b) Zeichnen Sie zusätzlich den Graphen der Funktion $y = -2x^2 + 4$.

    c) Bestimmen Sie rechnerisch die Schnittpunkte der beiden Graphen und zeichnen sie diese ein.

31. Beispiel: *Konstruktion linearer Funktionen*

    a) Bestimmen Sie die Parameter k und d der Geraden $y = kx + d$, die durch die Punkte $(x_1, y_1) = (-3, 2)$ und $(x_2, y_2) = (4, -5)$ geht. Zeichnen Sie die beiden Punkte und die Gerade.

    b) Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden mit der Steigung -2, die durch den Punkt $(x_1, y_1) = (2, 4)$ geht. Zeichnen Sie den Punkt und die Gerade. Liegt der Punkt $(x_2, y_2) = (3, 1)$ auf der Geraden? Argumentieren Sie rechnerisch und graphisch.

32. Beispiel: *Hintereinanderausführung von Funktionen*

    Gegeben seien die Funktionen $f(x) = x^3$ und $g(x) = 5x - 2$.

    a) Bestimmen Sie $f \circ g$, $g \circ f$ und $f \cdot g$. Erklären Sie den prinzipiellen Unterschied.

b) Ist die Hintereinanderausführung zweier linearer Funktionen wieder linear? Begründen Sie Ihre Antwort.

33. Beispiel: *Exponential- und Logarithmusfunktion, Spiegelung*

    a) Zeichnen Sie die Funktionen $y = e^x$ (Exponentialfunktion), $y = \ln(x)$ (Logarithmusfunktion) und $y = x$ (1. Hauptdiagonale) im Bereich [-2,3]. Überzeugen Sie sich, dass die Exponentialfunktion und die Logarithmusfunktion durch Spiegelung an der 1. Hauptdiagonalen auseinander hervorgehen.

    b) Zeichnen Sie die Funktion $y = e^{-x}$ (exponentiale Dämpfungsfunktion) im Bereich [-2,3]. Überzeugen Sie sich, dass diese Funktion durch Siegeln an der y-Achse aus der Exponentialfunktion $y = e^x$ hervorgeht.

34. Beispiel: *Umkehrfunktion*

    Gegeben sei die Funktion $y = \sqrt{x+3}$.

    a) Für welche Werte $x \in \mathbb{R}$ macht die Funktionsvorschrift Sinn? Die Menge dieser Werte heißt Definitionsbereich.

    b) Zeichnen Sie den Funktionsgraphen im Bereich $[-3, 6]$. Bestimmen Sie graphisch die Umkehrfunktion durch Spiegeln des Graphen an der 1. Hauptdiagonalen.

    c) Berechnen Sie die Umkehrfunktion durch Umformung der Funktionsvorschrift. Vergleichen Sie mit b).

    d) Bestimmen Sie den Definitionsbereich der Umkehrfunktion und vergleichen Sie mit a).

35. Beispiel: *surjektiv, injektiv, Umkehrfunktion*

    Zeichnen Sie die Funktion

    $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{gegeben durch} \quad f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1 \tag{1}$$

    im Bereich [-4,4]. Ist die Funktion f inkektiv, surjektiv? Begründen Sie Ihre Antwort. Schränken Sie den Wertebereich von f so ein, dass sie surjektiv wird. Schränken Sie nun auch den Definitionsbereich so ein, dass sie injektiv wird. Zeichnen Sie diese neue Funktion, geben Sie ihr den Namen g. Bestimmen Sie rechnerisch und graphisch die Umkehrfunktion von g und geben Sie sie wie in Gleichung (1) an.

36. Entscheiden Sie welche Funktionen gerade, ungerade oder keines von beiden ist:

    a) $y = x^3$

    b) $y = 2x^2 + |x|$

    c) $y = (x-1)^2$

37. Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen die Nullstellen und fertigen Sie eine Skizze des Funktionsgraphen an.

a) $y = (x-5)(x-1)$

b) $y = x^3 - 6x + 5$

c) $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$

38. Geben Sie an aus welchen elementaren Funktion die folgenden Funktionen zusammengesetzt sind:

a) $y = e^{(x-1)^2}$

b) $y = \tan(\sqrt{x-3})$

c) $y = \tan(\sqrt{x} - 3)$

d) $y = \tan(\sqrt{x}) - 3$

e) $y = \tan(e^{\sqrt{7x-1}})$

Trigonometrie

39. Beispiel:

a) Es sei $\sin(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Berechnen Sie $\cos(x)$, $\tan(x)$ und $\cot(x)$ ohne x zu berechnen. Machen Sie eine Skizze im Einheitskreis.

b) Von einem rechtwinkligen Dreieck seien bekannt $a = 3$, $b = 4$. Berechnen Sie $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$, $\tan(\alpha)$ und $\cot(\alpha)$.

c) Wie hoch ist ein Baum, dessen Spitze von einer 27 m entfernt stehenden Person mit einer Augenhöhe von 1.60 m unter einem Winkel von 25° zur horizontalen anvisiert wird?

Lösung: a) $\cos(x) = \pm\dfrac{1}{2}$, $\tan(x) = \pm\sqrt{3}$ und $\cot(x) \pm \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ b) 0.6, 0.8, 0.75, 1.33 c) 14.19 m

40. Beispiel: Geben Sie die Lösungsmenge an.

a) $\sin(-2x) = 0.5$ Machen Sie eine Skizze im Einheitskreis.

b) $\tan(x) + \sin(x) = 0$

c) $\cos(x + \dfrac{\pi}{4}) + \sin(x - \dfrac{\pi}{4}) = 0$ Hinweis: $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$ und $\sin(x+y) = \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y)$

Lösung: a) $L = \{x = -\dfrac{5}{12}\pi + k\pi$ oder $x = -\dfrac{1}{12}\pi + k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ b) $L = \{x = k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ c) $L = \mathbb{R}$

41. Beispiel: Zwischen den in gleicher Höhe liegenden Punkten A und B wird ein Drahtseil gespannt, an dem ein Körper mit dem Gewicht G= 3250 N befestigt ist.

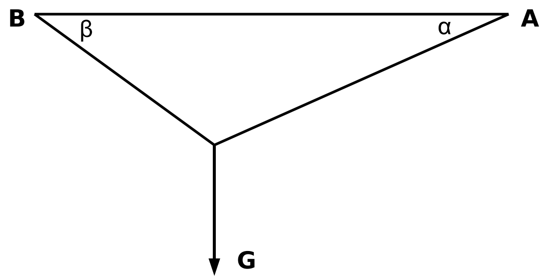

Abbildung 2: Drahtseil

Welche Zugkräfte treten in den beiden Seilsträngen auf, wenn $\alpha = 28°$, $\beta = 41°$ ist? Siehe Abb. 2.

Lösung: 2627.2 N und 3073.9 N

42. Beispiel: Berechnen Sie die übrigen Seiten und Winkel des Dreiecks mit a=179 m, b=208.3 m, β= 106°.

    Lösung: c= 68.04 m, α=55.7°, γ= 18.3°

43. Beispiel: Skizzieren Sie die Funktionen sin, cos und tan in einem gemeinsamen Graphen im Bereich $[-2\pi, 4\pi]$. Verwenden Sie den Einheitskreis als Hilfe.

Vektorrechnung und Analytische Geometrie

44. Gegeben sind die Vektoren $\mathbf{a} = (\mathbf{1}, \mathbf{0}, -\mathbf{2}), \mathbf{b} = (-\mathbf{3}, -\mathbf{5}, \mathbf{0}), \mathbf{c} = (\mathbf{4}, \mathbf{1}, \mathbf{7})$.

    Berechnen Sie: $-\mathbf{a} = ?, \mathbf{a} + \mathbf{b} = ?, \mathbf{a} - \mathbf{c} = ?, \mathbf{2a} - \mathbf{b} + \mathbf{3c} = ?$.

45. Normieren Sie die Vektoren $\mathbf{a} = (\mathbf{2}, -\mathbf{1}, \mathbf{3})$ und $\mathbf{b} = (\mathbf{4}, -\mathbf{3} - \mathbf{12})$.

46. Wie groß sind die Innenwinkel des Dreiecks mit den folgenden Eckpunkten?

    $$A(-4, -1), B(2, -2), C(1, 3)$$

47. Wie groß sind die Winkel des Dreiecks mit den Eckpunkten

    $$A(-2, 0, 3), B(-6, 4, -1), C(4, -1, 2)?$$

48. Geben Sie die Gleichung und die Vektordarstellung jener Geraden an die normal auf die Gerade $g : 2x - y + 1 = 0$ steht und durch den Punkt $P(2, 5)$ geht.

49. Bestimmen Sie Mittelpunkt und Radius des Kreises mit folgender Gleichung:

    a) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$

    b) $4x^2 + 4y^2 + 32x - 8y + 67 = 0$

50. Bestimmen Sie die Gleichung des Kreises,

    a) der durch die drei Punkte $P_1(3,0), P_2(5, \sqrt{5}-3), P_3(3+\sqrt{5}, -1)$ geht.

    b) der durch den Punkt $P(3,4)$ geht und die Gerade $g : y = -\frac{4}{3}x + \frac{25}{3}$ im Punkt $Q(4,3)$ berührt.

51. Wie groß ist die Fläche des Dreiecks mit den Eckpunkten $A(-2,0,3)$, $B(-6,4,-1)$, $C(4,-1,2)$.

52. Geben Sie die Ebenengleichung und die Parameterdarstellung der Ebene ε an, gegeben durch:

    a) Punkt $\mathbf{x} = (0,1,2)$ und zwei Richtungsvektoren $\mathbf{v} = (0,2,1)$, $\mathbf{w} = (2,3,-5)$

    b) 3 Punkte $\mathbf{x}_1 = (0,1,2)$, $\mathbf{x}_2 = (2,-3,4)$, $\mathbf{x}_3 = (7,-9,-1)$

    c) Punkt $\mathbf{x} = (0,1,2)$ un Normalvektor $\mathbf{n} = (0,2,1)$

53. Bestimmen Sie den Schnittpunkt von $g : \mathbf{x} = (1,1,1) + \lambda(-2,3,1)$ und $\varepsilon : 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 18$

54. Bestimmen Sie die Gleichung der Schnittgeraden von $\varepsilon_1 : 2x_1 + x_2 - x_3 = -1$ und $\varepsilon_2 : -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4$.

55. Bestimmen Sie z, sodass der Punkt $P_1(2,1,z)$ in der Ebene ε liegt.

$$\varepsilon : P_2(1,1,2), P_3(-1,-1,4), P_4(2,-2,9)$$

Differentialrechnung

56. Beispiel: Differenzieren Sie folgende Funktionen.

    a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

    b) $f(x) = x\sqrt{x}$

    c) $f(x) = \sin(x/2)$

    d) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$

57. Beispiel: *Mechanik*

    Bei einem senkrechten Wurf nach oben lautet die Weg-Zeit-Gleichung des Körperschwerpunktes des geworfenen Körpers

$$s = f(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 30\,\frac{m}{s}$ und der Erdbeschleunigung $g = 10\,\frac{m}{s^2}$. Wann erreicht dieser Körper seine größte Höhe? Wie groß ist sie? Zeichnen Sie einen Graphen von f und argumentieren Sie Ihre Vorgehensweise auch grafisch.

58. Beispiel: Differenzieren Sie folgende Funktionen.

a) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}} - 3\sqrt[3]{x^2} + \dfrac{6\sqrt[3]{x}}{x}$

b) $f(x) = (\sqrt{x} - 1)(1 + \sqrt{x})$

c) $f(x) = \sqrt{x}\sin(x)$

d) $f(x) = \dfrac{x\sin(x)}{1 + \tan(x)}$

e) $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2x^2}$

f) $f(x) = (2x + 1)^4$

g) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{(x-1)^3}}$

59. Beispiel: Berechnen Sie die erste Ableitung folgender Funktionen.

a) $f(x) = 3x^2 + 5e^{-2x}$

b) $f(x) = \frac{1-2x}{3x^2}$

c) $f(x) = 3x\sqrt{1 - x^2}$

d) $f(a) = a\ln(a) + b$

Lösung: a) $f'(x) = 6x - 10e^{-2x}$ b) $f'(x) = \frac{2(x-1)}{3x^3}$ c) $f'(x) = 3\sqrt{1 - x^2} - \frac{3x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ d) $f'(x) = \ln(a) + 1$

60. Beispiel: *Extremwertaufgabe*

Herr K. will ein Leihauto mieten, um von Eisenstadt nach Dornbirn (800 km) zu fahren. Der Benzinverbrauch y (in Liter/100km) hängt von der Fahrgeschwindigkeit x (in km/h) näherungsweise folgendermaßen ab:

$$y(x) = \frac{x}{10} - 5 + \frac{250}{x}.$$

a) Welche konstante Geschwindigkeit sollte Herr K. fahren, um den Benzinverbrauch zu minimieren?

b) Der Mietpreis für den Leihwagen beträgt 10 € pro Stunde sowie zusätzlich 50 € Grundgebühr. Der Treibstoff kostet 1,50 € Liter. Stellen Sie die Kostenfunktion für die Fahrt von Eisenstadt nach Dornbirn in Abhängigkeit von der konstanten Fahrgeschwindigkeit x auf.

c) Wie hoch ist die kostenminimale Geschwindigkeit?

Lösung: a) $x = 50$ km/h b) $K(x) = \frac{6x}{5} + \frac{11000}{x} - 10$ c) $x \simeq 95,7$ km/h

61. Beispiel: *Extremwertaufgabe*
Ein Kaffeproduzent will seine Spitzensorte in zylindrischen Aludosen verpacken. Um die Dose möglichst billig herstellen zu können, soll ihre Oberfläche bei vorgegebenem Volumen minimiert werden. Das Volumen der Dose wird mit 500 cm^3 festgesetzt. Bestimmen Sie die optimalen Werte für den Dosenradius r und für die Dosenhöhe h.

Hinweis: Das Volumen (V) und die Oberfläche (O) eines Zylinders sind gegeben durch:

$$\begin{aligned} V(r,h) &= \pi r^2 h \\ O(r,h) &= 2\pi r h + 2\pi r^2 \end{aligned}$$

Lösung: $r = \sqrt[3]{\frac{250}{\pi}} \simeq 4,3\,cm, h = \frac{500}{\pi}\sqrt[3]{\frac{\pi^2}{250^2}} \simeq 8,6\,cm$

62. Beispiel: Welchen Winkel bildet die Tangente im Punkt $P_0(x_0, y_0)$ an die Kurve $y = f(x)$ mit der x-Achse? $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$. Fertigen Sie eine Skizze an.

63. Beispiel: Diskutieren Sie die Kurve $y = \dfrac{x}{x^2+1}$.

64. Beispiel: *Extremwertaufgabe*
Zerlegen Sie eine reelle Zahl a so in zwei Summanden, dass deren Produkt möglichst groß wird.

Lösung: Die beiden Summanden sind $\dfrac{a}{2}$.

65. Beispiel: *Extremwertaufgabe*
Ein Unternehmen, das nur einen Artikel produziert, hat die Kostenfunktion

$$K(x) = 0,2\,x^2 + 2x + 20$$

sowie die Preis-Absatz-Funktion $p(x) = 32 - 0,3\,x$. Es werde vollständiger Absatz der Artikel vorausgesetzt. Bei welcher Stückzahl x erzielt das Unternehmen den maximalen Gewinn? Zeichnen Sie die Gewinnfunktion in diesem Bereich.

Lösung: $x_{max} = 30$.

Integralrechnung

66. Beispiel: Integrieren Sie.

a) $\int (x^3 - 5x^2 + 7x - 2)\,\mathrm{d}x$

b) $\int \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$

c) $\int 3 \cdot 2^x\,\mathrm{d}x$

d) $\int (2t-3)^2\,\mathrm{d}t$

e) $\int \sqrt{t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$

67. Beispiel: Berechnen Sie folgende bestimmte Integrale.

a) $\int_0^1 \dfrac{1}{2}e^x\,\mathrm{d}x$

b) $\int_\pi^{2\pi} \cos(\pi)\sin(x)\,\mathrm{d}x$

c) $\int_{x_1}^{x_2} (2x+1)\,\mathrm{d}x$

d) $2\int_2^3\,\mathrm{d}t$

e) $\int_0^1 \dfrac{x^n}{x^{1-n}}\,\mathrm{d}x$

68. Beispiel: Berechnen Sie folgende Integrale.

a) $\int \sqrt[3]{2x-7}\,\mathrm{d}x$

b) $\int \sin(\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{3})\,\mathrm{d}x$

c) $\int \dfrac{3x}{-x^2+1}\,\mathrm{d}x$

d) $\int \cos^7(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x$

e) $\int \cot(t)\,\mathrm{d}t$

69. Beispiel: Berechnen Sie folgende Integrale.

a) $\int 4x^3\ln(x)\,\mathrm{d}x$

b) $\int \cos^2(x)\,\mathrm{d}x$

c) $\int x^2\sin(x)\,\mathrm{d}x$

d) $\int \ln(x)x^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x$

e) $\int 2\varphi\sin(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$

70. Beispiel: Berechnen Sie folgende bestimmte Integrale.

a) $\int_{-1}^1 xe^x\,\mathrm{d}x$

b) $\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$

c) $\int_0^\pi e^x\sin(x)\,\mathrm{d}x$

d) $\int_0^\pi x^3\sin(x)\,\mathrm{d}x$

71. Beispiel: Berechnen Sie den Inhalt der Flächen die von den Kurven mit den angegebenen Gleichungen eingeschlossen werden:

a) $y=\cos(x)$, $y=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{5\pi}{6}$

b) $y=\frac{1}{x}$, $3y+3x=10$

c) $y = \frac{x^2}{4}$, $y = \frac{8}{4+x^2}$

d) $y = x^2$, $x = y^2$

e) $y = \cos(x)$, $y = sin(x)$ zwischen zwei benachbarten Schnittpunkten.

72. Bestimmen Sie das Weg-Zeit-Gesetz $s = s(t)$ und das Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz $v = v(t)$ eines Fahrzeuges für den Fall

a) einer konstanten Verzögerung $a = -2\frac{m}{s^2}$,

b) einer periodischen Verzögerung $a(t) = -(1 + \cos(\pi t))\frac{m}{s^2}$,

wenn in beiden Fällen die Anfangsbedingungen wie folgt lauten: $s(0) = 0m$ und $v(0) = 30m/s$.