

Zusatzprüfung

Mathematik 3

Prüfer: Thomas Steinberger

Datum:

Name

Sehr geehrte Kandidatin! Sehr geehrter Kandidat!

Das vorliegende Aufgabenheft enthält 24 Aufgaben. Ihnen stehen 180 Minuten (3 Stunden) für die Bearbeitung zur Verfügung.

Verwenden Sie zur Bearbeitung ausschließlich dieses Aufgabenheft und das Ihnen zur Verfügung gestellte Arbeitspapier. Schreiben Sie Ihren Namen und das heutige Datum in die dafür vorgesehenen Felder auf der ersten Seite des Aufgabenheftes.

Alle Antworten müssen in das Aufgabenheft geschrieben werden. In die Beurteilung wird alles einbezogen, was nicht durchgestrichen ist. Die Lösung muss dabei klar ersichtlich sein. Wenn die Lösung nicht klar ersichtlich ist oder verschiedene Lösungen angegeben sind, gilt die Aufgabe als nicht gelöst. Streichen Sie Ihre Notizen durch.

Sie dürfen eine Formelsammlung sowie die gewohnten elektronischen Hilfsmittel verwenden.

Das Aufgabenheft ist abzugeben.

Beurteilung:

Die Aufgaben 1 bis 18 werden jeweils mit 0 Punkten oder 1 Punkt bewertet. Die Bewertung der Aufgaben 19 bis 24 finden Sie jeweils am Ende des Aufgabentextes. Für eine positive Beurteilung der Zusatzprüfung Mathematik 3 müssen Sie 18 Punkte (50%) von 36 möglichen Punkten erreichen.

Aufgabe 1

Aussagen über Zahlen

Gegeben sind Aussagen über Zahlen.

Aufgabenstellung:

Welche der im Folgenden angeführten Aussagen gelten? Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Jede reelle Zahl ist eine irrationale Zahl.	<input type="checkbox"/>
Jede reelle Zahl ist eine komplexe Zahl.	<input type="checkbox"/>
Jede rationale Zahl ist eine ganze Zahl.	<input type="checkbox"/>
Jede ganze Zahl ist eine natürliche Zahl.	<input type="checkbox"/>
Jede natürliche Zahl ist eine reelle Zahl.	<input type="checkbox"/>

Aufgabe 2

Lösungen einer quadratischen Gleichung

Gegeben ist eine quadratische Gleichung $x^2 + p \cdot x - 3 = 0$ mit $p \in \mathbb{R}$.

Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht!

Diese Gleichung hat _____ ① _____, wenn _____ ② _____ gilt.

①	
unendlich viele reelle Lösungen	<input type="checkbox"/>
genau eine reelle Lösung	<input type="checkbox"/>
keine reelle Lösung	<input type="checkbox"/>

②	
$\frac{p^2}{4} + 3 > 0$	<input type="checkbox"/>
$\frac{p^2}{4} + 3 < 0$	<input type="checkbox"/>
$\frac{p^2}{4} + 3 > 1$	<input type="checkbox"/>

Aufgabe 3

Gleichungssystem

Gegeben ist ein Gleichungssystem aus zwei linearen Gleichungen in den Variablen $x, y \in \mathbb{R}$.

$$2x + 3y = 7$$

$$3x + by = c \text{ mit } b, c \in \mathbb{R}$$

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie diejenigen Werte für b und c , für die das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat!

$$b = \underline{\hspace{15em}}$$

$$c = \underline{\hspace{15em}}$$

Aufgabe 4

Normalvektoren

Gegeben ist der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie die Koordinate z_b des Vektors $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ z_b \end{pmatrix}$ so, dass \vec{a} und \vec{b} aufeinander normal stehen!

$z_b =$ _____

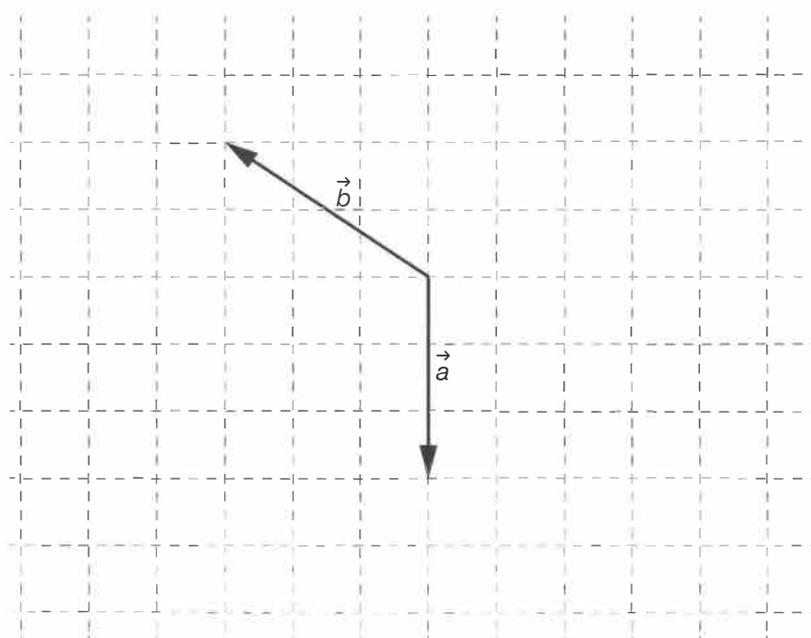
Aufgabe 5

Vektoren in der Ebene

Die unten stehende Abbildung zeigt zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} .

Aufgabenstellung:

Zeichnen Sie in die Abbildung einen Vektor \vec{c} so ein, dass die Summe der drei Vektoren den Nullvektor ergibt, also $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt!



Aufgabe 6

Standseilbahn Salzburg

Die *Festungsbahn Salzburg* ist eine Standseilbahn in der Stadt Salzburg mit konstanter Steigung. Die Bahn auf den dortigen Festungsberg ist die älteste in Betrieb befindliche Seilbahn dieser Art in Österreich. Die Standseilbahn legt eine Wegstrecke von 198,5 m zurück und überwindet dabei einen Höhenunterschied von 96,6 m.



Bildquelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Festungsbahn_Salzburg#/media/File:Festungsbahn_salzburg_20100720.jpg [27.05.2015]
(Urheber: Herbert Ortner, Lizenz: CC BY 3.0)

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie den Winkel α , unter dem die Gleise der Bahn gegen die Horizontale geneigt sind!

Aufgabe 7

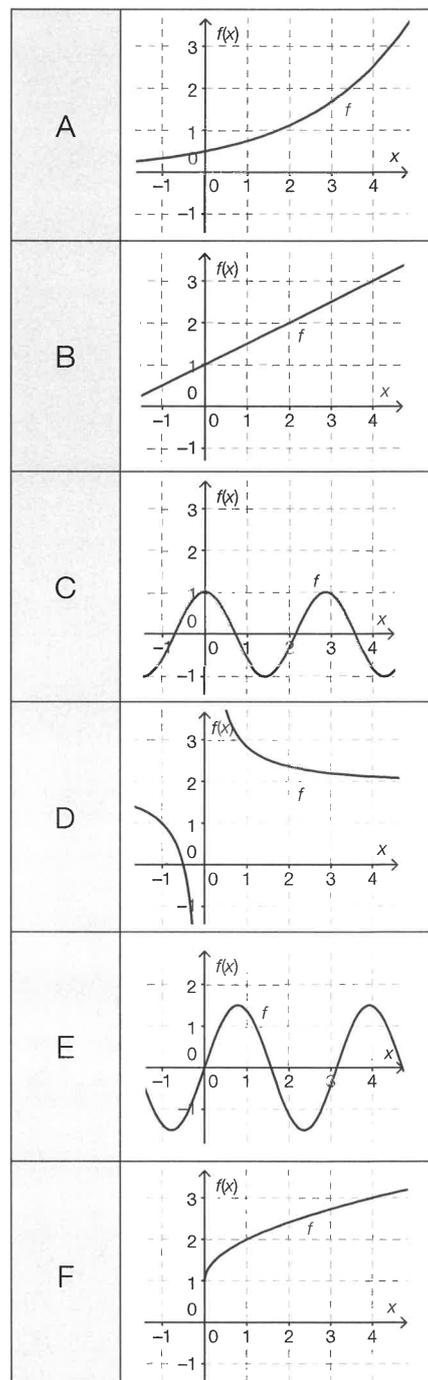
Funktionstypen

Im Folgenden sind vier Funktionsgleichungen (mit $a, b \in \mathbb{R}^+$) angeführt und die Graphen von sechs reellen Funktionen dargestellt.

Aufgabenstellung:

Ordnen Sie den vier Funktionsgleichungen jeweils den passenden Graphen (aus A bis F) zu!

$f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$	
$f(x) = a \cdot b^x$	
$f(x) = a \cdot \sqrt{x} + b$	
$f(x) = a \cdot x + b$	



Aufgabe 8

Gleichung einer Funktion

Der Graph der Funktion f ist eine Gerade, die durch die Punkte $P = (2|8)$ und $Q = (4|4)$ verläuft.

Aufgabenstellung:

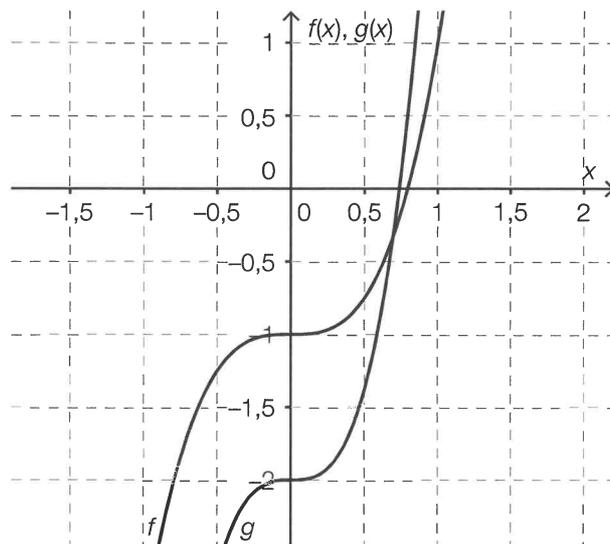
Geben Sie eine Funktionsgleichung der Funktion f an!

$f(x) =$ _____

Aufgabe 9

Parameter reeller Funktionen

Die nachstehende Abbildung zeigt die Graphen zweier reeller Funktionen f und g mit den Funktionsgleichungen $f(x) = a \cdot x^3 + b$ und $g(x) = c \cdot x^3 + d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.



Aufgabenstellung:

Welche der nachstehenden Aussagen treffen für die Parameter a, b, c und d zu? Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

$a > c$	<input type="checkbox"/>
$b > d$	<input type="checkbox"/>
$a > 0$	<input type="checkbox"/>
$b > 0$	<input type="checkbox"/>
$c < 1$	<input type="checkbox"/>

Aufgabe 10

Exponentialfunktion

Von einer Exponentialfunktion f sind die folgenden Funktionswerte bekannt:

$$f(0) = 12 \text{ und } f(4) = 192$$

Aufgabenstellung:

Geben Sie eine Funktionsgleichung der Exponentialfunktion f an!

$$f(x) = \underline{\hspace{15em}}$$

Aufgabe 11

Eigenschaften einer Exponentialfunktion

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 50 \cdot 1,97^x$.

Aufgabenstellung:

Welche der folgenden Aussagen trifft/treffen auf diese Funktion zu?

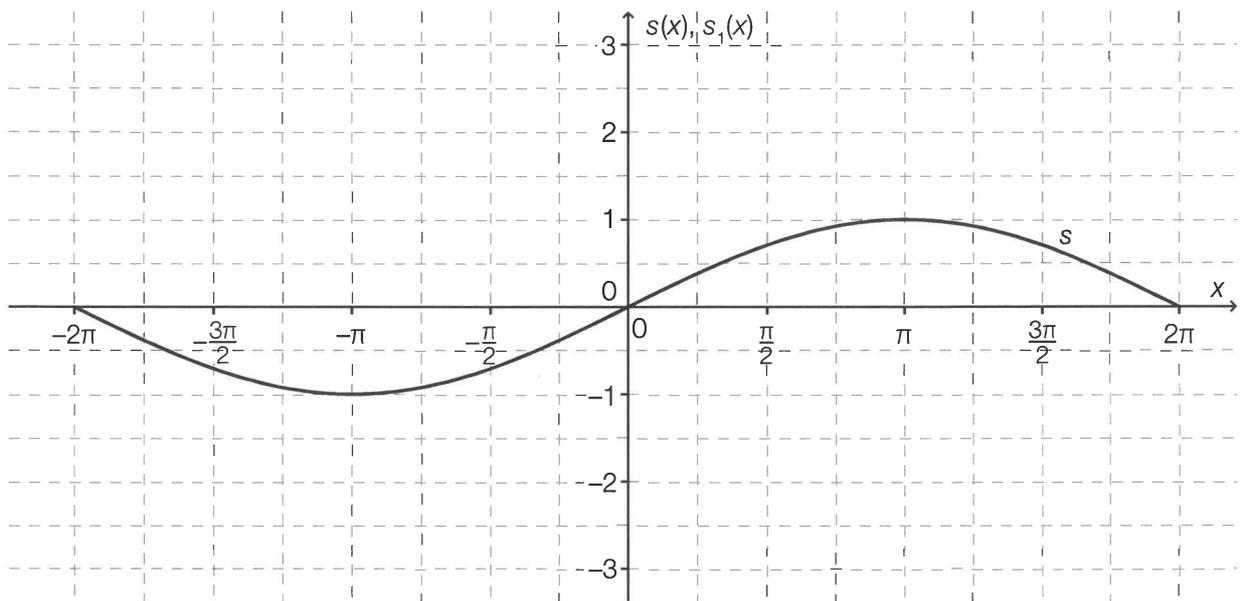
Kreuzen Sie die zutreffende(n) Aussage(n) an!

Der Graph der Funktion f verläuft durch den Punkt $P = (50 0)$.	<input type="checkbox"/>
Die Funktion f ist im Intervall $[0; 5]$ streng monoton steigend.	<input type="checkbox"/>
Wenn man den Wert des Arguments x um 5 vergrößert, wird der Funktionswert 50-mal so groß.	<input type="checkbox"/>
Der Funktionswert $f(x)$ ist positiv für alle $x \in \mathbb{R}$.	<input type="checkbox"/>
Wenn man den Wert des Arguments x um 1 vergrößert, wird der zugehörige Funktionswert um 97 % größer.	<input type="checkbox"/>

Aufgabe 12

Parameter einer Sinusfunktion

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion s mit der Gleichung $s(x) = c \cdot \sin(d \cdot x)$ mit $c, d \in \mathbb{R}^+$ im Intervall $[-2\pi; 2\pi]$.



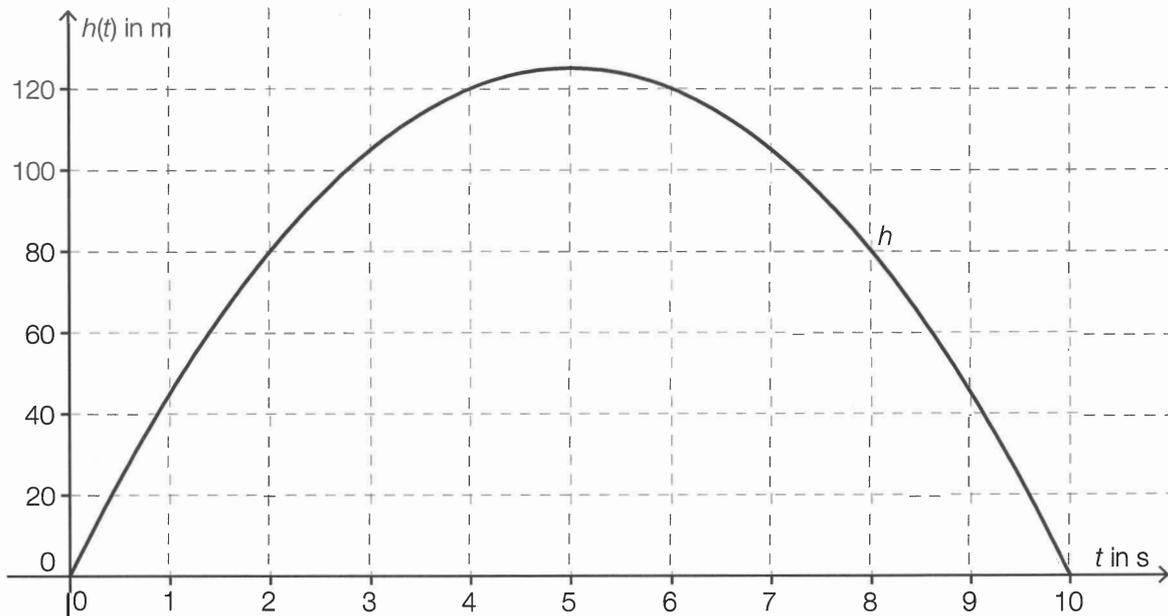
Aufgabenstellung:

Erstellen Sie im obigen Koordinatensystem eine Skizze eines möglichen Funktionsgraphen der Funktion s_1 mit $s_1(x) = 2c \cdot \sin(2d \cdot x)$ im Intervall $[-2\pi; 2\pi]$.

Aufgabe 13

Mittlere Geschwindigkeit

Die Funktion h , deren Graph in der nachstehenden Abbildung dargestellt ist, beschreibt näherungsweise die Höhe $h(t)$ eines senkrecht nach oben geschossenen Körpers in Abhängigkeit von der Zeit t (t in Sekunden, $h(t)$ in Metern).



Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie anhand des Graphen die mittlere Geschwindigkeit des Körpers in Metern pro Sekunde im Zeitintervall $[2 \text{ s}; 4 \text{ s}]$!

Aufgabe 14

Reelle Funktion

Eine reelle Funktion f ist durch die Funktionsgleichung $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 5x - 2$ gegeben.

Aufgabenstellung:

Geben Sie eine Funktionsgleichung der Ableitungsfunktion f' der Funktion f an!

$f'(x) =$ _____

Aufgabe 15

Sinusfunktion und Cosinusfunktion

Gegeben sind die Funktionen f mit $f(x) = \sin(a \cdot x)$ und g mit $g(x) = a \cdot \cos(a \cdot x)$ mit $a \in \mathbb{R}$.

Aufgabenstellung:

Welche Beziehung besteht zwischen den Funktionen f und g und deren Ableitungsfunktionen?
Kreuzen Sie diejenige Gleichung an, die für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt!

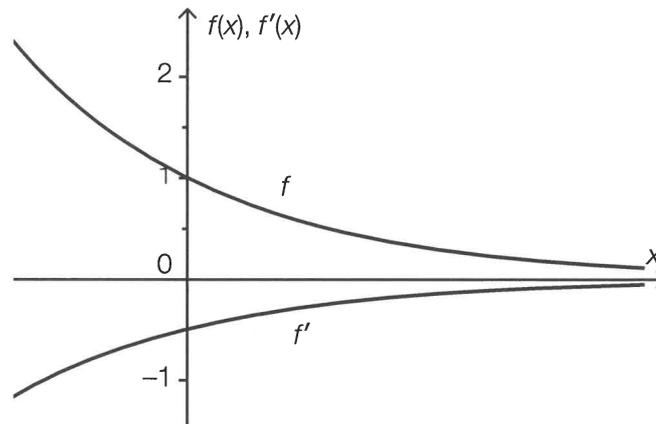
$a \cdot f'(x) = g(x)$	<input type="checkbox"/>
$g'(x) = f(x)$	<input type="checkbox"/>
$a \cdot g(x) = f'(x)$	<input type="checkbox"/>
$f(x) = a \cdot g'(x)$	<input type="checkbox"/>
$f'(x) = g(x)$	<input type="checkbox"/>
$g'(x) = a \cdot f(x)$	<input type="checkbox"/>

Aufgabe 16

Differenzieren einer Exponentialfunktion

Gegeben ist eine Funktion f mit $f(x) = e^{\lambda \cdot x}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Die nachstehende Abbildung zeigt die Graphen der Funktion f und ihrer Ableitungsfunktion f' .



Aufgabenstellung:

Geben Sie den Wert des Parameters λ an!

$\lambda =$ _____

Aufgabe 17

Stammfunktion

Gegeben ist eine Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = e^{2 \cdot x}$.

Aufgabenstellung:

Welche von den unten durch ihre Funktionsgleichungen angegebenen Funktionen F ist Stammfunktion von f und verläuft durch den Punkt $P = (0|1)$?

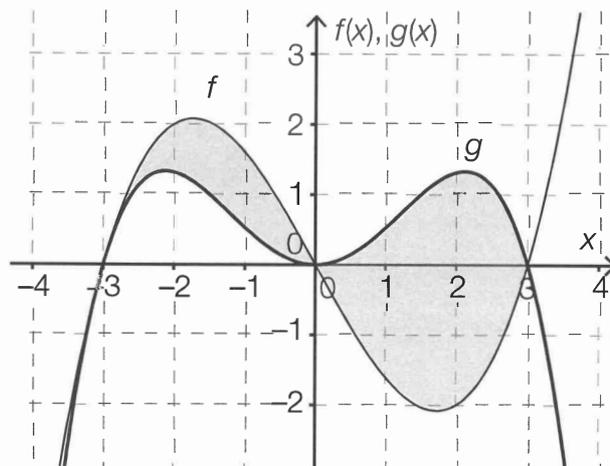
Kreuzen Sie die zutreffende Antwort an!

$F(x) = e^{2 \cdot x} + \frac{1}{2}$	<input type="checkbox"/>
$F(x) = 2 \cdot e^{2 \cdot x} - 1$	<input type="checkbox"/>
$F(x) = 2 \cdot e^{2 \cdot x}$	<input type="checkbox"/>
$F(x) = \frac{e^{2 \cdot x}}{2} + \frac{1}{2}$	<input type="checkbox"/>
$F(x) = e^{2 \cdot x}$	<input type="checkbox"/>
$F(x) = \frac{e^{2 \cdot x}}{2}$	<input type="checkbox"/>

Aufgabe 18

Flächeninhaltsberechnung

In der nachstehenden Abbildung sind die Graphen der Polynomfunktionen f und g dargestellt. Diese schneiden einander an den Stellen -3 , 0 und 3 und begrenzen die beiden grau markierten Flächenstücke.



Aufgabenstellung:

Welche der nachstehenden Gleichungen geben den Inhalt A der (gesamten) grau markierten Fläche an? Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Gleichungen an!

$A = \left \int_{-3}^3 (f(x) - g(x)) dx \right $	<input type="checkbox"/>
$A = 2 \cdot \int_0^3 (g(x) - f(x)) dx$	<input type="checkbox"/>
$A = \int_{-3}^0 (f(x) - g(x)) dx + \int_0^3 (g(x) - f(x)) dx$	<input type="checkbox"/>
$A = \left \int_{-3}^0 (f(x) - g(x)) dx \right + \int_0^3 (f(x) - g(x)) dx$	<input type="checkbox"/>
$A = \int_{-3}^0 (f(x) - g(x)) dx + \left \int_0^3 (f(x) - g(x)) dx \right $	<input type="checkbox"/>

Aufgabe 19

Gegeben sind die Punkte $A(2|-1|7)$, $B(2|-3|1)$, $C(3|0|6)$ und $S(-6|3|-1)$.

1. Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene durch die Punkte A , B und C .
2. Bestimmen Sie den Abstand zwischen S und der Ebene.
3. Bestimmen Sie den Winkel zwischen der Verbindungslinie AS und der Ebene.

[0/1/2/3 Punkte]

Aufgabe 20

a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Geraden $y = 2x + 2$ mit der Parabel

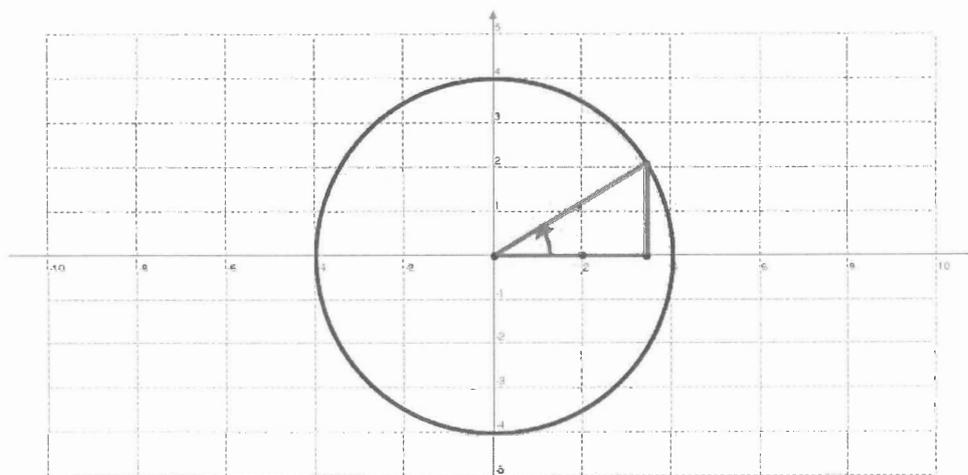
$$y = -x^2 + 2x + 3.$$

- b) Bestimmen Sie den Hoch- bzw. Tiefpunkt der Parabel.
c) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des von der Parabel und der Geraden eingeschlossenen Flächenstücks.

[0/1/2/3/4 Punkte]

Aufgabe 21

Bei welchem Winkel zwischen 0 und $\pi/2$ ist der Flächeninhalt des Dreiecks maximal?
Begründen Sie Ihre Antwort durch eine Rechnung.



[0/1/2 Punkte]

Aufgabe 22

1. Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Ungleichung in \mathbb{R} und in \mathbb{Z} .

$$\frac{5 - 3x}{x + 2} \geq 2$$

2. Lösen Sie folgende Gleichungen in \mathbb{R} :

$$\ln(x^3) - 2\ln(x) - 1 = 0$$

3. Lösen Sie folgende Gleichungen in \mathbb{R} :

$$\sqrt{3x + 4} + 3/2 = x + 3/2$$

[0/1/2/3 Punkte]

Aufgabe 23

Im Rahmen der Konferenz *Breath Gas Analysis for Medical Diagnosis* an der FH Vorarlberg fand im Restaurant *Altes Gericht* ein Essen im Bruttowert von 4.778,40 € (Netto 4.223,92 €) statt. Berechnen Sie die Nettobeträge der Speisen und Getränke, wenn für Speisen 10% und für Getränke 20% MWSt auf die Nettobeträge gerechnet wurden.

[0/1/2/3 Punkte]

Aufgabe 24

a) Bestimmen Sie die Gleichung jenes Polynoms 2. Grades $f(x) = ax^2 + bx + c$, dessen Graph durch die Punkte $(1|4)$, $(2|3)$ und $(-2|-5)$ geht.

b) Zeichnen Sie eine Skizze des Graphen im Bereich $[-2, 4]$.

[0/1/2/3 Punkte]